ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Учебное пособие

г. Ставрополь
2020

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я73

Литвин, Д.Б.
Интегральное исчисление функций: Учебное пособие / Литвин Д.Б. – Ставропольский гос. аграрный университет. - Ставрополь, 2020. – 76 с.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению 38.03.01 - Экономика. Содержание материала в целом соответствует второй части дисциплины «Математический анализ».

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1 Понятие неопределенного интеграла

Неопределенный интеграл от функции $f(x)$ - множество всех первообразных $F(x)+C$ для $f(x)$, который обозначается символом $\int f(x)dx$

$$\int f(x)dx = F(x)+C. \tag{1}$$

1.2 Свойства неопределенного интеграла

В соответствие с определением (1) неопределенный интеграл обладает следующими свойствами.

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx, \qquad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$

Используется для проверки «правильности» интегрирования.

2. $\int dF(x) = F(x)+C.$

3. $\int af(x)dx = a\cdot\int f(x)dx, \quad a\neq 0$ - постоянная.

4. $\int\left(f(x)\pm g(x)\right) = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

5. Если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(ax+b)\cdot dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$

Пример: $\int sin\left(2x-5\right)\cdot dx = -\frac{1}{2}cos\left(2x-5\right)+C$.

6. (Инвариантность формулы интегрирования). Если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(u)du = F(u)+C$, где $u=\varphi(x)$ — произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Так из формулы $\int u^2du = \frac{u^3}{3}+C$ для различных $u=\varphi(x)$ получаем:

$$\int sin^2x\cdot cos\,x\cdot dx = \int sin^2x\cdot d\left(sin\,x\right) = \frac{sin^3x}{3}+C,$$

$$\int \frac{ln^2x}{x}dx = \int ln^2x\cdot d\left(ln\,x\right) = \frac{ln^3x}{3}+C,$$

$$\int \frac{tg^2x}{cos^2x}dx = \int tg^2x\cdot d\left(tgx\right) = \frac{tg^3x}{3}+C.$$

Таблица основных интегралов представлена в приложении 2.

2 ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

2.1 Метод непосредственного интегрирования

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется непосредственным интегрированием.

При сведении данного интеграла к табличному часто используется операция подведения под знак дифференциала:

$$du = d(u \pm a), \qquad du = \frac{1}{a}d(au), \quad \text{где } a - \text{число},$$

$$\cos u\,du = d(\sin u), \qquad \sin u\,du = -d(\cos u),$$

$$\frac{1}{u}du = d(\ln u), \qquad \frac{1}{\cos^2 u}du = d(tgu).$$

Вообще, $f'(u)du = d(f(u))$, эта формула очень часто используется при вычислении интегралов.

Примеры:

1. $$\int(2x^4 - 3x^2 + x - 5)dx = 2\int x^4dx - 3\int x^2dx + \int xdx - \int 5dx =$$
$$= \frac{2}{5}x^5 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + C,$$

2. $$\int \frac{x+1}{x}dx = \int\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx = x + \ln|x| + C,$$

3. $$\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C,$$

4. $$\int\left(4x^3 - \frac{5}{\cos^2 2x} + 3^{1-x}\right)dx = 4\int x^3dx - 5\int \frac{dx}{\cos^2 2x} + \int 3^{1-x}dx =$$
$$= x^4 - \frac{5}{2}tg2x - \frac{3^{1-x}}{\ln 3} + C,$$

5. $$\int(3x-1)^{24}dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-1)^{25}}{25} + C;$$

6. $$\int ctg^2 x dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = -ctgx - x + C,$$

7. $$\int \sin^2 6x dx = \frac{1}{2}\int(1 - \cos 12x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{12}\sin 12x\right) + C,$$

8. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+3}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+1+2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+2}}=$

$=\int\frac{dx(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}}=ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+3}\right|+C;$

9. $\int x(x+2)^9dx=\int(x+2-2)(x+2)^9\,dx=\int(x+2)^{10}\,dx-2\int(x+2)^9\,dx=$

$=\frac{(x+2)^{11}}{11}-2\frac{(x+2)^{10}}{10}+C\,;$

10. $\int x^3\cdot\sqrt[3]{1+x^2}\,dx=\int\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}}\cdot x\cdot\left(x^2+1-1\right)dx=$

$=\frac{1}{2}\int\left(1+x^2\right)^{\frac{4}{3}}d\left(1+x^2\right)-\frac{1}{2}\int\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}}d\left(1+x^2\right)=\frac{3}{14}\left(1+x^2\right)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{8}\left(1+x^2\right)^{\frac{4}{3}}+C.$

Задания для самостоятельной работы:

1. $\int\left(x^2+2x+\frac{1}{x}\right)dx$

2. $\int\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$

3. $\int\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}{x}dx$

4. $\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} dx$

5. $\int \left(2x\sqrt{x} - 7x\right)^2 dx$

6. $\int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2}\right) dx.$

7. $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx.$

8. $\int e^{-3x} dx.$

9. $\int (3 - 2x)^4 dx.$

10. $\int e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} dx$

11. $\int \frac{x-2}{x^3} dx$

12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

13. $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$

2.2 Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

В ряде случаев подынтегральное выражение удается представить в виде

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx. \tag{2}$$

Тогда используя замену переменной интегрирования (подстановку) $t=\varphi(x)$, исходный интеграл приводится к новому, более простому интегралу:

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = \left|\begin{matrix} t=\varphi(x) \\ dt=\varphi'(x)dx \end{matrix}\right| = \int f(t)dt. \tag{3}$$

После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к переменной x.

Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой.

Примеры:

1. $$\int\frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \left|\begin{matrix} t=\sqrt{3}\cdot x \\ dt=\sqrt{3}\cdot dx \end{matrix}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{\sqrt{2^2-t^2}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot arcsin\frac{t}{2}+C = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot arcsin\frac{\sqrt{3}\cdot x}{2}+C;$$

2. $\int tgudu = \int\frac{sinu\cdot du}{cosu} = -\int\frac{d(cosu)}{cosu} = -ln\left|cosu\right|+C$ (вывод формулы 7);

3. $$\int\frac{dx}{ctg^5x\cdot sin^2x} = \left|\begin{matrix} t=ctgx \\ dt=\dfrac{-dx}{sin^2x} \end{matrix}\right| = -\int t^{-5}dt = -\frac{t^{-4}}{-4}+C = \frac{1}{4ctg^4x}+C \ ;$$

4. $$\int x\cdot\sqrt{x-3}dx = \left|\begin{matrix} t=\sqrt{x-3} \\ x=t^2+3 \\ dx=2t\cdot dt \end{matrix}\right| = \int\left(t^2+3\right)\cdot t\cdot 2tdt = 2\int\left(t^4+3t^2\right)dt =$$
$$= 2\int t^4dt+6\int t^2 = \ 2\cdot\frac{t^5}{5}+6\cdot\frac{t^3}{3}+C = \frac{2}{5}(x-3)^{5/2}+2(x-3)^{3/2}+C.$$

5. $$\int\frac{dx}{e^x+1} = \left|\begin{matrix} e^x=t \\ x=lnt \\ dx=\dfrac{dt}{t} \end{matrix}\right| = \int\frac{dt}{t(t+1)} = \int\frac{dt}{t^2+t} = \int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}} =$$

$$= -\int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(t+\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}} ln\left|\frac{\frac{1}{2}+t+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t-\frac{1}{2}}\right| + C = -ln\left|\frac{t+1}{-t}\right| = ln\left|\frac{t}{t+1}\right| = ln\frac{e^x}{e^x+1} + C.$$

Задание для самостоятельной работы:

1. $\int 5x\sqrt{1-2x^2}\ dx$

2. $\int \frac{x^2\,dx}{\left(3+2x^3\right)^2}$

3. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+7}}$

4. $\int \frac{3^{arctg\ x}}{1+x^2}dx$

5. $\int sin^2 x \cos x dx.$

6. $\int \frac{\cos x dx}{sin^4 x}.$

7. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$

8. $\int \frac{sin^5 x}{\sqrt{\cos x}} dx$

9. $\int \frac{2^x \, dx}{\sqrt{1-4^x}}$

10. $\int \frac{e^{3x}\ dx}{1-e^{3x}}$

11. $\int \frac{dx}{(arcsin\ x)^3\ \sqrt{1-x^2}}$

2.3 Метод интегрирования по частям

Рассмотрим функцию, которая представляет собой произведение двух других, более простых функций, имеющих непрерывные производные

$$g(x)=u(x)\cdot v(x) \quad \text{или кратко} \quad g=u\cdot v.$$

Тогда ее дифференциал примет вид $d(uv)=u\cdot dv+v\cdot du$. Интегрируя это равенство, получим $\int d(uv)=uv=\int udv+\int vdu$, откуда получаем формулу интегрирования по частям:

$$\int udv=uv-\int vdu. \qquad (4)$$

Эта формула позволяет свести вычисление интеграла $\int f(x)dx=\int udv$ к вычислению более простого интеграла $\int vdu$.

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение заданного интеграла представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей u и dv; затем, после нахождения $v=\int dv$ и $du=u'dx$, используется формула (4) интегрирования по частям. Иногда эту формулу приходится использовать несколько раз.

Примеры:

1. $\int(2x+1)e^{3x}dx=\left|\begin{array}{l} u=2x+1\Rightarrow du=2dx \\ dv=e^{3x}dx\Rightarrow v=\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x} \end{array}\right|=(2x+1)\cdot\frac{1}{3}e^{3x}-\int\frac{1}{3}e^{3x}2dx=$

$$=\frac{1}{3}(2x+1)e^{3x}-\frac{2}{9}e^{3x}+C.$$

2. $$\int x\sin xdx=\begin{vmatrix} u=x\Rightarrow du=dx \\ dv=\sin xdx\Rightarrow v=-\cos x \end{vmatrix}=-x\cos x+\int\cos xdx=-x\cos x+\sin x+C$$

3. $$\int x^2e^xdx=\begin{vmatrix} u=x^2\Rightarrow du=2xdx \\ dv=e^xdx\Rightarrow v=e^x \end{vmatrix}=x^2e^x-2\int e^x\cdot xdx=\begin{vmatrix} u_1=x\Rightarrow du_1=dx \\ dv_1=e^xdx\Rightarrow v_1=e^x \end{vmatrix}=$$

$$=x^2e^x-2\left(xe^x-\int e^xdx\right)=x^2e^x-2\left(xe^x-e^x\right)+C=e^x\left(x^2-2x+2\right)+C;$$

Некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

а) Интегралы вида $\int P(x)a^{kx}dx$**,** $\int P(x)\cdot\sin kxdx$**,** $\int P(x)\cos kxdx$,

где $P(x)$ — многочлен, k — число. Удобно положить $u=P(x)$, а за dv обозначить все остальные сомножители. Этому случаю соответствуют рассмотренные выше примеры.

б) Интегралы вида $\int P(x)\arcsin xdx$, $\int P(x)\arccos xdx$, $\int P(x)\ln(x)dx$, $\int P(x)arctg(x)dx$, $\int P(x)arcctg(x)dx$.

Удобно положить $P(x)dx=dv$, а за *u* обозначить остальные сомножители.

Примеры:

1. $$\int\ln x\cdot dx=\begin{vmatrix} u=\ln x\Rightarrow du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=dx\Rightarrow v=x \end{vmatrix}=x\cdot\ln x-\int x\cdot\frac{dx}{x}=x\cdot\ln x-x+C.$$

2. $$\int arctgxdx=\begin{vmatrix} u=arctgx\Rightarrow du=\dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv=dx\Rightarrow v=x \end{vmatrix}=x\cdot arctgx-\int\frac{x}{1+x^2}dx=$$

$$=x\cdot arctgx-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}=xarctgx-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C.$$

в) ***Интегралы вида*** $\int e^{ax}\cdot\sin bxdx$, $\int e^{ax}\cdot\cos bxdx$, где a и b — числа, называются циклическими.

Они вычисляются двойным применением формулы (4). За *u* можно принять, как функцию $u=e^{ax}$, так и $u=\cos bx$.

Пример. Вычислить интегралы

$I_1 = \int e^{ax} \cos bx dx$ и $I_2 = \int e^{ax} \sin bx dx.$

Для I_1 получим

$$\int e^{ax}\cos bxdx = \left| \begin{matrix} u = e^{ax}, & du = ae^{ax}dx, \\ dv = \cos bxdx, v = \frac{1}{b}\sin bx, & \end{matrix} \right| = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bxdx.$$

К последнему интегралу снова применим интегрирования по частям:

$$\int e^{ax}\sin bxdx = \left| \begin{matrix} u = e^{ax}, & du = ae^{ax}dx, \\ dv = \sin bxdx, v = -\frac{1}{b}\cos bx & \end{matrix} \right| = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx.$$

Подставляя полученное выражение в предыдущее равенство, получим

$$\int e^{ax}\cos bxdx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bxdx.$$

Найдем из последнего равенства I1:

$$\frac{a^2+b^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bxdx = e^{ax}\left(\frac{1}{b}\sin bx + \frac{a}{b^2}\cos bx\right) + C\frac{a^2+b^2}{b^2},$$

откуда $$I_1 = \int e^{ax}\cos bxdx = \frac{e^{ax}\left(b\sin bx + a\cos bx\right)}{a^2+b^2} + C.$$

Аналогично находим $$I_2 = \int e^{ax}\sin bxdx = \frac{e^{ax}\left(a\sin bx - b\cos bx\right)}{a^2+b^2} + C.$$

Пример (вывод формулы 14). $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}dx = ?$

Произведем тождественные преобразования. Умножим и разделим подынтегральную функцию на $\sqrt{a^2-x^2}$:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx = \int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a^2\arcsin\frac{x}{a} - \int x\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Последний интеграл проинтегрируем по частям:

$$\int x\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left| \begin{matrix} u = x, & du = dx, \\ dv = \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}, v = -\sqrt{a^2-x^2} & \end{matrix} \right| = -x\sqrt{a^2-x^2} + \int\sqrt{a^2-x^2}dx.$$

Подставляя последний результат в полученное ранее выражение данного интеграла, будем иметь

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2 \arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Перенося интеграл справа налево и выполнив элементарные преобразования, окончательно получим

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Задания для самостоятельной работы:

1. $\int (2-x)\cdot e^{-\frac{x}{2}}\,dx$

2. $\int (2x+3)\ln x\,dx$

3. $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$

4. $\int (x^2 - 5x - 1) \cos 6x \, dx$

5. $\int x^3 \, arctg \ x \, dx$

6. $\int x^2 \cdot 5^{\frac{x}{2}}\, dx$

7. $\int \frac{ln\, x}{x^2}\, dx$

3 ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

3.1 Комплексные числа

Алгебраическая форма комплексных чисел.

Комплексным числом z называется выражение

$$z = a + ib, \tag{5}$$

где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, которая определяется соотношением:

$$i^2 = -1; \qquad i = \sqrt{-1}. \tag{6}$$

При этом число a называется действительной частью числа z ($a = Re\, z$), a b - мнимой частью ($b = Im\, z$).

Комплексное число z можно представить в трех эквивалентных формах:

— алгебраической;

— тригонометрической;

— показательной.

Выражение (5) называется алгебраической формой записи комплексного числа.

Тригонометрическая форма комплексного числа

Из геометрических соображений видно, что $a = r\cos\phi; \quad b = r\sin\phi$.

Тогда комплексное число можно представить в тригонометрической форме записи:

$$z = a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{7}$$

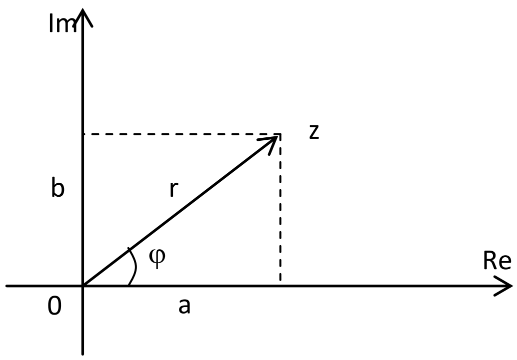


Рисунок 1 – Геометрическое представление комплексного числа z

При этом величина r называется модулем комплексного числа, а угол φ - аргументом комплексного числа.

$$r = |z|; \qquad \phi = Arg\, z.$$

Из геометрических соображений видно:

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = Arg\, z = arctg\frac{b}{a}. \qquad (8)$$

Числа $z = a + ib$ и $\overline{z} = a - ib$ называются комплексно – сопряженными. Изображающие их векторы симметричны относительно действительной оси.

Очевидно, что комплексно – сопряженные числа имеют одинаковые модули и противоположные аргументы.

$$|z| = |\overline{z}|; \qquad Arg\, z = -Arg\, \overline{z}.$$

Действия с комплексными числами в алгебраической форме записи

Основные действия с комплексными числами вытекают из действий с многочленами.

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$

$$|z| = \sqrt{(a_1 \pm a_2)^2 + (b_1 \pm b_2)^2}$$

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + i^2b_1b_2 =$$

$$= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)$$

В случае комплексно – сопряженных чисел:

$$z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2.$$

Деление выполняется умножением числителя и знаменателя дроби на число комплексно-сопряженной знаменателю

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$$

$$z = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Показательная форма комплексного числа. Формула Эйлера

Формулой Эйлера называют выражение

$$e^{i\varphi} = cos\,\varphi + i\, sin\,\varphi \qquad (9)$$

Использование этой формулы позволяет представить тригонометрическую форму записи комплексного числа (7) в виде

$$z = re^{i\varphi}. \qquad (10)$$

Выражение (10) называется показательной формой записи комплексного числа.

Для комплексных чисел будут справедливы следующие свойства:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}; \quad e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}; \quad (e^z)^m = e^{mz};$$ где m – целое число.

Из уравнений $e^{iy} = \cos y + i\sin y$, $e^{-iy} = \cos y - i\sin y$ получаем:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}; \qquad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

Показательная форма удобна для возведения комплексных чисел в степень

$$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \tag{11}$$

и извлечения корней

$$\sqrt[n]{z} = \left(re^{i(\varphi+2\pi k)}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \quad k = 0,1,2,...n-1. \tag{12}$$

Таким образом, корень n–ой степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Выражения (11), (12) называются ***формулами Муавра*** (Абрахам де Муавр (1667 – 1754) – английский математик).

Формулу Муавра можно использовать для нахождения тригонометрических функций двойного, тройного и т.д. углов.

Пример. Найти формулы sin2φ и cos2φ.

Рассмотрим комплексное число $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$.

Тогда с одной стороны $z^2 = r^2(\cos^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi)$.

По формуле Муавра: $z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$

Приравнивая, получим $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi$,

откуда $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$; $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$.

Получили известные формулы двойного угла.

Примеры действий с комплексными числами:

Пример 1. Даны два комплексных числа $z_1 = 1 - \frac{7}{2}i$; $z_2 = -7 - 2i$.

Найти значение выражения $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{-4}$ в алгебраической форме.

Очевидно, справедливо следующее преобразование:

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{-4}=\left(\frac{1-\frac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4}=\left(\frac{2-7i}{-14-4i}\right)^{-4}=\left(\frac{-14-4i}{2-7i}\right)^{4}=16\left(\frac{-7-2i}{2-7i}\right)^{4}$$

Далее производим деление двух комплексных чисел:

$$\frac{-7-2i}{2-7i}=\frac{(-7-2i)(2+7i)}{(2-7i)(2+7i)}=\frac{-14-49i-4i+14}{4+49}=\frac{-53i}{53}=-i.$$

Получаем значение заданного выражения: $16(-i)^4 = 16i^4 = 16$.

Пример 2. Для числа $z=2-2\sqrt{3}i$ найти тригонометрическую форму, найти z^{20}, найти корни уравнения $w^3+z=0.$

Число $z=2-2\sqrt{3}i$ представим в виде $z=r(\cos\phi+i\sin\phi)$, где

$$r=|z|=\sqrt{4+12}=4; \qquad \phi=arctg\frac{b}{a}=arctg\left(-\sqrt{3}\right)=-60^0$$

Тогда $z=4\left(\cos\left(-60^0\right)+i\sin\left(-60^0\right)\right)=4\left(\cos 60^0-i\sin 60^0\right)$.

Для нахождения z^{20} воспользуемся формулой Муавра (11)

$$z^{20}=4^{20}(\cos 1200^0-i\sin 1200^0)=4^{20}(\cos(3\cdot 2\pi+120^0)-i\sin(3\cdot 2\pi+120^0))=$$

$$=4^{20}(\cos 120^0-i\sin 120^0)=-4^{20}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Если $w^3+z=0$, то $w=\sqrt[3]{-z}$. Применим формулу Муавра (12)

$$\sqrt[3]{-z}=\sqrt[3]{4}\left(-\cos\frac{60^0+2\pi k}{3}+i\sin\frac{60^0+2\pi k}{3}\right); \quad k=0,1,2;$$

$$w_1=\sqrt[3]{4}\left(-\cos 20^0+i\sin 20^0\right); \quad \text{для } k=0;$$

$$w_2=\sqrt[3]{4}\left(-\cos 140^0+i\sin 140^0\right); \quad \text{для } k=1;$$

$$w_3=\sqrt[3]{4}\left(\cos 100^0-i\sin 100^0\right); \quad \text{для } k=2.$$

Задания для самостоятельной работы:

1. Построить на комплексной плоскости точки, соответствующие числам: $z_1=-3+5i, z_2=-4i, z_3=2, z_4=2\sqrt{3}-2i$

2. Даны числа $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = -2 - 2i$. Записав числа в показательной форме, выполнить следующие действия: а). $z_1 \cdot z_2$, б). $\frac{z_1}{z_2}$, в). z_1^8, г). $\sqrt[5]{z_2}$.

3. Дано комплексное число $z = \frac{-2\sqrt{2}}{1-i}$. Требуется: 1) записать число z в алгебраической и тригонометрической формах; 2) найти все корни уравнения $w^3 + z = 0$.

3.2 Понятия о рациональных функциях

Функция вида $f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n$ называется целой рациональной функцией от *x*.

Отсюда следует, что любой многочлен n – ой степени имеет ровно n корней (действительных или комплексных).

Если многочлен $P_n(x)$ *с действительными коэффициентами имеет комплексный корень* $a + ib$*, то он имеет и сопряженный корень* $a - ib$.

В разложении многочлена комплексные корни входят сопряженными парами. Перемножив линейные множители получим трехчлен второй степени с действительными коэффициентами

$$\left(x-(a+ib)\right)\cdot\left(x-(a-ib)\right)=\left((x-a)-ib\right)\left((x-a)+ib\right)=$$
$$=(x-a)^2+b^2=x^2-2ax+a^2+b^2=x^2+px+q,$$

где $p = -2a,\ q = a^2 + b^2$.

С учетом выше изложенного справедлива следующая теорема.

Всякий многочлен с действительными коэффициентами разлагается на линейные и квадратные множители с действительными коэффициентами, т.е. многочлен $P_n(x)$ *можно представить в виде*

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)^{k1}(x-x_2)^{k2}\ldots(x-x_r)^{kr}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{s1}\ldots\left(x^2+p_mx+q_m\right)^{sm} \qquad (13)$$

При этом $k_1 + k_2 + \ldots + k_r + 2(s_1 + s_2 + \ldots + s_m) = n$, где все квадратные трехчлены ***не имеют вещественных корней***.

Дробно-рациональной функцией (или рациональной дробью) называется функция, равная отношению двух многочленов, т. е. $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ — где $P_m(x)$ - многочлен степени *m*, а $Q_n(x)$ — многочлен степени *n*.

Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя, т. е. $m < n$; в противном случае (если $m \geq n$) рациональная дробь называется *неправильной*.

Всякую неправильную рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ можно, путем деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы многочлена $L(x)$ и правильной рациональной дроби $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$, т.е. $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$.

Например, $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{x^4-5x+9}{x-2}$ неправильная рациональная дробь. Разделим числитель на знаменатель в столбик:

$$\begin{array}{rrrr|l}
-\;x^4 & & & -5x+9 & x-2 \\
\underline{x^4-2x^3} & & & & \overline{x^3+2x^2+4x+3} \\
& -\;2x^3 & & -5x+9 & \\
& \underline{2x^3-4x^2} & & & \\
& & -\;4x^2 & -5x+9 & \\
& & \underline{4x^2} & \underline{-8x} & \\
& & & -\;3x+9 & \\
& & & \underline{3x-6} & \\
& & & 15. &
\end{array}$$

Получим частное $L(x)=x^3+2x^2+4x+3$ и остаток $R(x)=15$. Следовательно, $\dfrac{x^4-5x+9}{x-2}=x^3+2x^2+4x+3+\dfrac{15}{x-2}$.

Простейшие рациональные дроби I, II, III и IV типов

I. $\dfrac{A}{x-a}$;

II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ $(k\ge a, k\in N)$;

III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ (корни знаменателя комплексные, т. е. $p^2-4q<0$);

IV. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ ($k\ge 2$, корни знаменателя комплексные),

где *A, a, M, N, p, q* — действительные числа.

Всякую правильную рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой разложен на множители

$$Q(x)=(x-x_1)^{k1}(x-x_2)^{k2}\ldots(x^2+p_1x+q_1)^{s1}\ldots(x^2+p_mx+q_m)^{sm},$$

можно представить (и притом единственным образом) в виде суммы простейших дробей.

Поясним формулировку теоремы на следующих примерах:

1) $\dfrac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^3}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}+\dfrac{C}{(x-3)^2}+\dfrac{D}{(x-3)^3};$

2) $\dfrac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1};$

3) $\dfrac{7x^2+8x+9}{(x-1)(x-2)(x^2+x+1)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+x+1}+\dfrac{Mx+N}{(x^2+x+1)^2}.$

Для нахождения неопределенных коэффициентов $A_1,A_2,...,B_1,B_2,...$ в разложениях можно применить ***метод неопределенных коэффициентов***. Суть метода рассмотрим ***на примере***:

Представить дробь $\dfrac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}$ в виде суммы простейших дробей:

Т.к. трехчлен x^2-2x+5 не имеет действительных корней (D<0), то

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+5},$$

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\frac{A(x^2-2x+5)+(x-1)(Bx+C)}{(x-1)(x^2-2x+5)}.$$

Отсюда следует

$$2x^2-3x-3\equiv Ax^2-2Ax+5A+Bx^2-Bx+Cx-C,$$

т. е.

$$2x^2-3x-3\equiv(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+(5A-C).$$

Приравнивая коэффициенты при x^2,x^1,x^0, получаем

$$\begin{cases}2=A+B,\\ -3=-2A-B+C,\\ -3=5A-C.\end{cases}$$

Решая систему, находим, что $A=-1, B=3, C=-2.$ Следовательно,

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\frac{-1}{x-1}+\frac{3x-2}{x^2-2x+5}.$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов применяют также ***метод частных значений аргумента***: после получения тождества аргументу *x* придают конкретные значения столько раз, сколько неопределенных коэффициентов (обычно полагают вместо *x* значения ***действительных*** корней знаменателя).

Пример. Представить дробь $\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}$ в виде суммы простейших дробей.

$$\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}.$$

$$3x-4\equiv A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2).$$

Положим $x=0$, тогда $-4=-2A$, т. е. $A=2$; положим $x=2$, тогда $2=6B$, т. е. $B=\frac{1}{3}$ положим $x=-1$, тогда $-7=3C$, т. е. $C=-\frac{7}{3}$. Следовательно,

$$\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}=\frac{2}{x}+\frac{\frac{1}{3}}{x-2}+\frac{-\frac{7}{3}}{x+1}.$$

3.3 Интегрирование простейших рациональных дробей

I. $\int\frac{A}{x-a}dx=\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\cdot ln|x-a|+C$;

II. $\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\cdot\int(x-a)^{-k}d(x-a)=A\cdot\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C$;

III. Интегралы $J=\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx.$ с комплексно-сопряженными полюсами берутся выделением полного квадрата в знаменателе с последующей подстановкой, как показано в примере.

Пример. Найти $\int\frac{3x+1}{x^2+2x+10}dx.$

Решение: $x^2+2x+10=(x+1)^2+9.$ Сделаем подстановку $x+1=t$. Тогда $x=t-1, dx=dt$ и

$$\int\frac{3x+1}{x^2+2x+10}dx=\int\frac{3(t-1)+2}{t^2+9}dt=3\int\frac{tdt}{t^2+9}-2\int\frac{dt}{t^2+9}=$$

$$\frac{3}{2}ln(t^2+9)-\frac{2}{3}arctg\frac{t}{3}+C=\frac{3}{2}ln(x^2+2x+10)-\frac{2}{3}arctg\frac{x+1}{3}+C.$$

IV. Вычисление интеграла вида $I=\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx, k\geq 2, q-\frac{p^2}{4}>0$.

Данный интеграл подстановкой $x+\frac{p}{2}=t$ сводится к сумме двух интегралов:

$$I=M\int\frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^k}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k},\quad a^2=q-\frac{p^2}{4}.$$

Первый интеграл легко вычисляется:

$$\int\frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{2}\int\left(t^2+a^2\right)^{-k}d\left(t^2+a^2\right)=\frac{1}{2(1-k)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}+C.$$

Вычислим второй интеграл:

$$J_k=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{a^2}\int\frac{\left(t^2+a^2\right)-t^2}{\left(t^2+a^2\right)^k}dt=$$

$$=\frac{1}{a^2}\left(\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}-\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}\right)=\frac{1}{a^2}\left(J_{k-1}-\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}\right). \qquad (14)$$

Откуда

$$J_k=\frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}J_{k-1}+\frac{t}{2(k-1)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}\right). \qquad (15)$$

Полученная формула дает возможность найти интеграл J_k для любого натурального числа $k>1$.

Пример. Найти интеграл $J_3=\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)^3}$.

Решение: Здесь $a=1,\ k=3.$ Так как $J_1=\int\frac{dt}{t^2+1}=arctgt+C_1,$

то используя (15), получим

$$J_2=\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2}=\frac{2\cdot2-3}{2\cdot2-2}J_1+\frac{t}{2\cdot(2-1)\left(t^2+1\right)}=\frac{1}{2}arctgt+\frac{t}{2\left(t^2+1\right)}+C_1,$$

$$J_3=\frac{3}{4}J_2+\frac{t}{4\left(t^2+1\right)^2}=\frac{t}{4\left(t^2+1\right)^2}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}arctgt+\frac{t}{2\left(t^2+1\right)}\right)+C.$$

3.4 Интегрирование рациональных дробей

Общее правило интегрирования рациональных дробей.

— Если дробь неправильная, то представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби;
— Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить ее в виде суммы простейших рациональных дробей;
— Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx.$

Решение: Под знаком интеграла неправильная дробь; выделим ее целую часть путем деления числителя на знаменатель:

$$
\begin{array}{rl}
-\begin{array}{l} x^5 \qquad\quad +2x^3 \quad +4x+4 \\ \underline{x^5+2x^4+2x^3} \end{array} & \begin{array}{|l} \underline{x^4+2x^3+2x^2} \\ x-2 \end{array} \\
-\begin{array}{l} -2x^4 \qquad\qquad +4x+4 \\ \underline{-2x^4-4x^3-4x^2 \qquad} \end{array} & \\
4x^3+4x^2+4x+4 & \text{(остаток).}
\end{array}
$$

Получаем:

$$\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=x-2+\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}.$$

Разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^2\left(x^2+2x+2\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2},$$

$$4x^3+4x^2+4x+4\equiv Ax\left(x^2+2x+2\right)+B\left(x^2+2x+2\right)+\left(Cx+D\right)x^2,$$

т.е.

$$4x^3+4x^2+4x+4\equiv\left(A+C\right)x^3+\left(2A+B+D\right)x^2+\left(2A+2B\right)x+2B.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} A+C=4, \\ 2A+B+D=4, \\ 2A+2B=4, \\ 2B=4. \end{cases}$$

Находим: $B=2,\ A=0,\ C=4,\ D=2$. Стало быть,

$$\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}$$

и

$$\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=x-2+\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}.$$

Интегрируем полученное равенство:

$$\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx = \int\left(x-2+\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+\int\frac{4x+2}{\left(x+1\right)^2+1}dx.$$

Обозначим $x+1=t$, тогда $x=t-1$ и $dx=dt$. Таким образом,

$$\int\frac{4x+2}{\left(x+1\right)^2+1}dx = \int\frac{4t-4+2}{t^2+1}dt = 4\int\frac{tdt}{t^2+1}-2\int\frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= 4\cdot\frac{1}{2}ln\left(t^2+1\right)-2arctgt+C = 2\cdot ln\left(x^2+2x+2\right)-2arctg\left(x+1\right)+C.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx = \frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}-2ln\left(x^2+2x+2\right)-2arctg\left(x+1\right)+C.$$

Отметим, что любая рациональная функция интегрируется в элементарных функциях.

Задания для самостоятельной работы:

1. $\int\frac{2x-3}{x^2+2x+7}\,dx$

2. $\int\frac{5x+1}{x^2-4x+1}\,dx$

3. $\int \frac{x^5 - x^3 + 1}{x^2 - x} dx.$

4. $\int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-2)x} dx.$

5. $\int \frac{x^3+2x^2+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx.$

4 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

4.1 Тригонометрические подстановки

Функцию с переменными $\sin x$ и $\cos x$, над которыми выполняются рациональные действия (сложения, вычитание, умножение и деление) принято обозначать $R(\sin x;\cos x)$, где R — знак рациональной функции.

Вычисление интегралов типа $\int R(\sin x;\cos x)dx$ сводится к вычислению интегралов от рациональной функции т.н. универсальной тригонометрической подстановкой

$$tg\frac{x}{2}=t. \tag{16}$$

Действительно,

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x=2arctgt, \qquad dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

Поэтому

$$\int R(\sin x;\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2};\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2t}{1+t^2}dt=\int R_1(t)dt,$$

где $R_1(t)$— рациональная функция от t. Обычно этот способ весьма громоздкий, зато он всегда приводит к результату.

Пример 1. 1. Найти интеграл $\int\frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$.

Решение: Сделаем универсальную подстановку $t=tg\frac{x}{2}$. Тогда $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$. Следовательно,

$$\int\frac{dx}{3+\sin x+\cos x}=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=\int\frac{dt}{t^2+t+2}=$$

$$=\int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=\frac{2}{\sqrt{7}}arctg\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{7}/2}+C=\frac{2}{\sqrt{7}}\cdot arctg\frac{1+2tg\frac{x}{2}}{\sqrt{7}}+C.$$

Пример 1. 2. Вывод формулы (16). Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sin x}$.

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\left|\begin{matrix} t=tg\frac{x}{2}; & \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \\ x=2arctgt; & dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{matrix}\right|=\int\frac{2dt}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+t^2\right)}=\int\frac{dt}{t}=ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C.$$

Пример 1. 3. Вывод формулы (17). Найти интеграл $\int\frac{dx}{\cos x}$.

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\left|\begin{matrix} t=tg\frac{x}{2}; & \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ x=2arctgt; & dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{matrix}\right|=\int\frac{2dt}{\frac{1-t^2}{1+t^2}\left(1+t^2\right)}=2\int\frac{dt}{1-t^2}=\frac{2}{2}ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=$$

$$=ln\left|\frac{tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cdot\left(1-tg\frac{\pi}{4}\cdot tg\frac{x}{2}\right)}{1-tg\frac{x}{2}}\right|+C=ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C.$$

Здесь использовалась известная формула: $tg\left(\alpha\pm\beta\right)=\frac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha\cdot tg\beta}$,

$$1+tg\frac{x}{2}=tg\frac{\pi}{4}+tg\frac{x}{2}=tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cdot\left(1-tg\frac{\pi}{4}\cdot tg\frac{x}{2}\right).$$

На практике универсальная подстановка часто приводит к слишком сложным рациональным функциям. Поэтому наряду с ней имеет смысл освоить также **другие подстановки**, которые в некоторых случаях быстрее приводят к цели.

1) Если интеграл имеет вид $\int R\left(\sin x\right)\cos x dx$, то, очевидно, подстановка

$$t=\sin x;\quad dt=\cos x dx \tag{17}$$

рационализирует его, т.е. приводит к виду $\int R\left(t\right)dt$.

2) Если интеграл имеет вид $\int R\left(\cos x\right)\sin x dx$, то он приводится к интегралу от рациональной функции заменой

$$t=\cos x; dt=-\sin x dx. \tag{18}$$

3) Если подынтегральная функция зависит только от tgx, то подстановка

$$t = tgx;\ \ x = arctgt;\ \ dx = \frac{dt}{1+t^2} \qquad (19)$$

рационализирует этот интеграл: $\int R(tgx)dx = \int \frac{R(t)}{1+t^2}dt$.

4) Если подынтегральная функция имеет вид $R(\sin x;\cos x)$, но $\sin x$ и $\cos x$ входят только в четных степенях, то применяется та же подстановка (19):

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2} \qquad \sin^2 x = 1-\cos^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}. \qquad (20)$$

Пример 2. Найти интеграл $I = \int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

Решение: Так как подынтегральная функция зависит только от квадрата $\sin x$, то имеем 4-й случай подстановки (20). Поэтому

$$I = \int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(1+\frac{t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{2t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\sqrt{2}t\right)}{\left(\sqrt{2}t\right)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\sqrt{2}t + C = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\left(\sqrt{2}tgx\right) + C.$$

4.2 Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$

Для нахождения таких интегралов используются следующие приемы:

1) подстановка (17), т.е. $\sin x = t$, если n — целое положительное нечетное число;
2) подстановка (18), т.е. $\cos x = t$, если m — целое положительное нечетное число;
3) формулы понижения порядка:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right),\ \sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right),\ \ \sin x\cdot\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \qquad (21)$$

если m и n — *целые неотрицательные четные числа*;

$$\int \sin^4 x dx = \frac{1}{2^2}\int\left(1-\cos 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \sin 2x + \frac{1}{2}\int\left(1+\cos 4x\right)dx\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8}\right) + C.$$

4) если оба показателя четные, причем хотя бы один из них отрицателен, то предыдущий прием не годится. Здесь следует сделать замену $t = tgx$ (или $t = ctgx$).

Пример 3. Найти интеграл $I = \int sin^4 x cos^5 xdx.$

Решение: Применим подстановку $sin x = t$.

Тогда $x = arcsin t,\ dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt,\ \ cos x = \sqrt{1-t^2}$ и

$$I = \int t^4 \cdot \left(\sqrt{1-t^2}\right)^5 \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int t^4 \left(1-t^2\right)^2 dt = \int \left(t^4 - 2t^6 + t^8\right) dt =$$

$$= \frac{t^5}{5} - 2\frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C = \frac{1}{5}sin^5 x - \frac{2}{7}sin^7 x + \frac{1}{9}sin^9 x + C.$$

Пример 4. Найти интеграл $I = \int sin^4 x cos^2 xdx.$

Решение:

$$I = \int \left(sin x cos x\right)^2 sin^2 xdx = \int \frac{1}{4} sin^2 2x \cdot \frac{1}{2}\left(1 - cos 2x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int sin^2 2xdx - \frac{1}{8}\int sin^2 2x cos 2xdx = \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}\left(1 - cos 4x\right) dx -$$

$$- \frac{1}{16}\int sin^2 2xd\left(sin 2x\right) = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}sin 4x - \frac{1}{48}sin^3 2x + C.$$

Пример 5. Найти интеграл $I = \int \frac{dx}{cos x \cdot sin^3 x} = \int cos^{-1} x \cdot sin^{-3} xdx.$

Решение: Здесь $m + n = 4$. Обозначим $tgx = t$.

Тогда $x = arctgt,\ dx = \frac{dt}{1+t^2},\ sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ и

$$I = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{t^3}{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^3}} = \int \frac{1+t^2}{t^3} dt = \int t^{-3} dt + \int \frac{dt}{t} =$$

$$= -\frac{1}{2t^2} + ln|t| + C = -\frac{1}{2} \cdot ctg^2 x + ln|tgx| + C.$$

4.3 Использование тригонометрических преобразований

Интегралы типа $\int sin ax \cdot cos bxdx,\ \int cos ax \cdot cos bxdx,\ \int sin ax \cdot sin bxdx$ вычисляются с помощью известных формул тригонометрии:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right).$$

Пример 6. Найти интеграл $I = \int \sin 8x \cos 2x dx.$

Решение:

$$I = \int \sin 8x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int\left(\sin 10x + \sin 6x\right)dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{10}\cos 10x - \frac{1}{6}\cos 6x\right) + C.$$

5 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Тригонометрическая подстановка

Интегралы следующих типов приводятся к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций подстановками

интегралы: $\int R\left(x;\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, $\int R\left(x;\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$, $\int R\left(x;\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$

подстановки: $x = a\cdot\sin t$, $x = a\cdot tgt$, $x = \dfrac{a}{\sin t}$.

Пример 1. Найти интеграл $I = \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx.$

Решение: Положим $x = 2\sin t$, $dx = 2\cos t dt$, $t = \arcsin\frac{x}{2}$. Тогда

$$I = \int \frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt = \int \frac{4\cos^2 t}{4\sin^2 t}dt =$$

$$= \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt = \int \frac{dt}{\sin^2 t} - \int dt = -ctgt - t + C =$$

$$= C - \arcsin\frac{x}{2} - ctg\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) = C - \arcsin\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

$$\left(ctgt = \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}{\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right).$$

Подстановки Эйлера [2] для $\int R\left(x;\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx, \quad a\neq 0.$

1-я подстановка, при a>0

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\cdot x+t;$$

2-я подстановка, при c>0

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c};$$

3-я подстановка, для действительных корней трехчлена α,β

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t.$$

Пример 2. (Вывод формулы (11)). Найти интеграл $\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm c}}dx.$

Применим 1-ю подстановку Эйлера

$$\sqrt{x^2\pm c}=-x+t; \qquad t=x+\sqrt{x^2\pm c};$$

Тогда $x^2\pm c=x^2-2xt+t^2;$

Откуда $x=\frac{t^2\mp c}{2t}; \qquad dx=\frac{t^2\pm c}{2t^2}\cdot dt; \qquad \sqrt{x^2\pm c}=t-\frac{t^2\mp c}{2t}=\frac{t^2\pm c}{2t}.$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm c}}dx=\int\frac{2t}{t^2\pm c}\cdot\frac{t^2\pm c}{2t^2}\cdot dt=\int\frac{dt}{t}=ln\left|x+\sqrt{x^2\pm c}\right|+C.$$

Задания для самостоятельной работы:

1. $\int sin^2 3x\,dx$

2. $\int(1+2cos\,x)^2dx$

3. $\int cos^4 x\,dx$

4. $\int sin^2 x\,cos^4 x\,dx$

5. $\int sin^2 x\,cos^3 x\,dx$

6. $\int sin^5 x\,dx$

7. $\int \frac{cos^3 x\,dx}{sin^2 x}$

8. $\int sin3x\,sin5x\,dx$

9. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx.$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}.$$

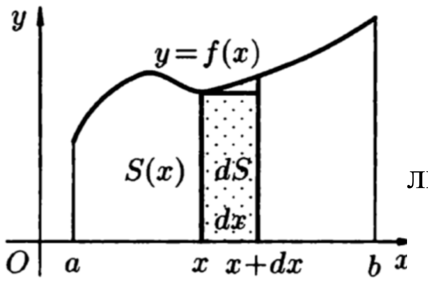
6 ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

6.1 Определенный интеграл и его свойства

Определенный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ - предел интегральной суммы при $max\,\Delta x_i \to 0$, если он не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a,b]$, ни от выбора точек ξ_i на отрезках $[x_{i-1},x_i]$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{max\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \,. \tag{22}$$

Геометрический смысл определенного интеграла (22) - площадь криволинейной трапеции *S(x)*, если $f(x) \ge 0$ (см. рис. 2):



$$S = \int_a^b f(x)dx \text{ или } S = \int_a^b y dx. \tag{23}$$

Криволинейная трапеция ограничена линиями

$$y = f(x) \ge 0,\; x = a,\; x = b,\; y = 0$$

Рисунок 2 - Геометрический смысл определенного интеграла

Основные свойства определенного интеграла

$$\int_a^b \left[c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x)\right]dx = c_1\int_a^b f_1(x)dx + c_2\int_a^b f_2(x)dx; \tag{24}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx; \tag{25}$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx; \tag{26}$$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\,f(\xi). \tag{27}$$

Формула Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{28}$$

где $F(x)$ - какая-либо первообразная от непрерывной функции $f(x)$.

Замена переменной в определенном интеграле

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt, \quad где \;\; x = \varphi(t),\; \varphi(\alpha) = a,\; \varphi(\beta) = b. \tag{29}$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_4^{16} \frac{\sqrt{x}}{x\left(\sqrt{x}-1\right)}dx$.

Применим подстановку $\sqrt{x}=t; x=t^2; dx=2t\cdot dt$. Воспользуемся формулой замены переменной (29) и определим новые пределы интегрирования: $x=4$ *при* $t=2,\ x=16$ *при* $t=4$, получим

$$\int\limits_4^{16} \frac{\sqrt{x}}{x(\sqrt{x}-1)}dx = \int\limits_2^4 \frac{t\cdot 2t}{t^2(t-1)}dt = 2\int\limits_2^4 \frac{dt}{t-1} = 2\ln\left|t-1\right|\Big|_2^4 = 2\left(\ln 3-\ln 1\right) = 2\ln 3.$$

Пример 2. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{-2}^{0}(x^2-4)\cos 3x dx$.

Дважды применим формулу интегрирования по частям: $\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du.$

$$\int\limits_{-2}^{0}(x^2-4)\cos 3x dx = \left|\begin{matrix} u=x^2-4 & dv=\cos 3x dx \\ du=2x dx & v=\frac{1}{3}\sin 3x \end{matrix}\right| = \frac{1}{3}(x^2-4)\sin 3x\Big|_{-2}^{0} -$$

$$-\frac{2}{3}\int\limits_{-2}^{0} x\sin 3x dx = \left|\begin{matrix} u=x & dv=\sin 3x dx \\ du=dx & v=-\frac{1}{3}\cos 3x \end{matrix}\right| = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}x\cos 3x\Big|_{-2}^{0} + \frac{1}{3}\int\limits_{-2}^{0}\cos 3x dx\right) =$$

$$= -\frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3}\cos 6 + \frac{1}{9}\sin 3x\Big|_{-2}^{0}\right) = \frac{4}{9}\cos 6 - \frac{2}{27}\sin 6.$$

Для вычисления несобственных интегралов необходимо применить предельный переход, то есть изменить пределы интегрирования так, чтобы они стали конечными (для несобственных интегралов 1-го рода) и подынтегральная функция сохранила непрерывность внутри и на концах нового промежутка интегрирования (для несобственных интегралов 2-го рода).

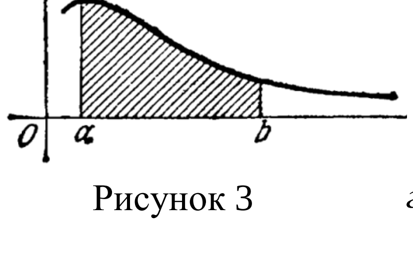


Рисунок 3

Интеграл с бесконечным пределом интегрирования (1-го рода)

$$\int\limits_a^{+\infty} f\left(x\right)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f\left(x\right)dx. \qquad (30)$$

Если этот предел *существует, то интеграл сходится*, иначе - *расходится*.

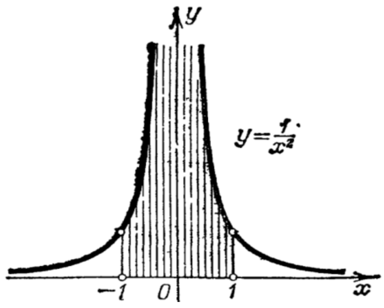


Рисунок 4

Интеграл от разрывной функции (2-го рода)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to -0} \int_a^{\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{\varepsilon_2}^b f(x)dx. \quad (31)$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Используя выражение (30) для несобственного интеграла 1-го рода, имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} arctg\, x\Big|_0^b = \lim_{b \to +\infty} arctg b = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$.

Так как подынтегральная функция разрывна в точке $x = 0$, то данный несобственный интеграл 2-го рода нужно представить как сумму двух слагаемых (31):

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1 \to -0} \int_{-1}^{\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x^2}.$$

Вычислим каждый предел отдельно:

$$\lim_{\varepsilon_1 \to -0} \int_{-1}^{\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\varepsilon_1 \to -0} \frac{1}{x}\Big|_{-1}^{\varepsilon_1} = -\lim_{\varepsilon_1 \to -0} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{-1} \right) = \infty;$$

$$\lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\varepsilon_2 \to +0} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \right) = \infty.$$

Интеграл расходится, как на участке $[-1,0]$, так и на участке $[0,1]$.

Таким образом, данный интеграл расходится на всем отрезке $[-1,1]$.

Отметим, что если вычислять данный интеграл, не обращая внимания на разрыв подынтегральной функции, то получим неверный результат:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{-1} \right) = -2,$$

что невозможно (см. рисунок 4).

Задания для решения в аудитории:

1) Вычислить определенный интеграл.

1. $\int_0^1 x^2 dx$

2. $\int_1^2 2^{3x-4} dx$

3. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{cos^2 x}$

4. $\int_0^1 xe^{-x} dx$

5. $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\left(x^2+2x+1\right)\sin 3x dx$

2) Вычислить, используя указанные подстановки:

1. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\cos^2 x\cdot dx, \qquad \cos x=t.$

2. $\int\limits_{1}^{4}\frac{x\cdot dx}{\sqrt{2+4x}}, \qquad 2+4x=t^2.$

3. $\int\limits_{0}^{\pi}\frac{dx}{3+2\cos x}, \qquad tg\frac{x}{2}=t.$

4. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}, \qquad x = tgt.$

5. $\int\limits_{1}^{5} \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx, \qquad \sqrt{x-1} = t.$

6. $\int\limits_{3/4}^{4/3} \frac{dz}{z\sqrt{z^2+1}}, \qquad z = \frac{1}{x}.$

7. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \cdot dx}{6 - 5\sin x + \sin^2 x}$, $\quad \sin x = t.$

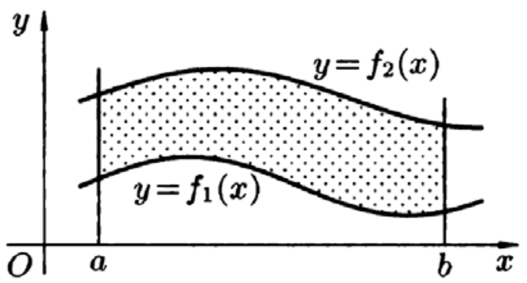
2). Изобразить график подынтегральной функции и найти несобственный интеграл

1. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x+2}$

2. $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{x} dx$

3. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$

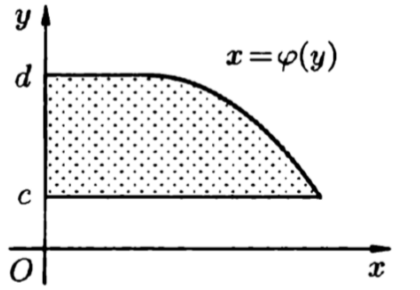
6.2 Вычисление площадей фигур с помощью определенного интеграла



Интегрирование **по *x*** в декартовой системе координат (СК)

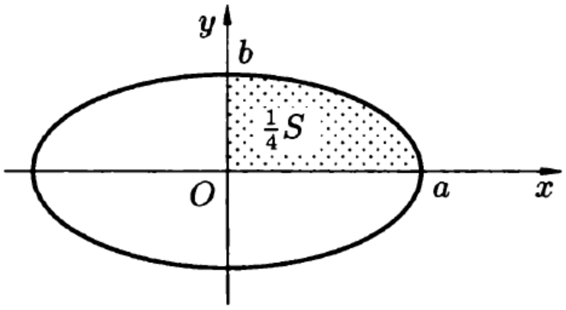
$$S=\int_a^b y\cdot dx,\quad y=f\left(x\right);\tag{32}$$

$$S=\int_a^b\left[f_2\left(x\right)-f_1\left(x\right)\right]dx.\tag{33}$$



Интегрирование **по *y*** в декартовой системе координат

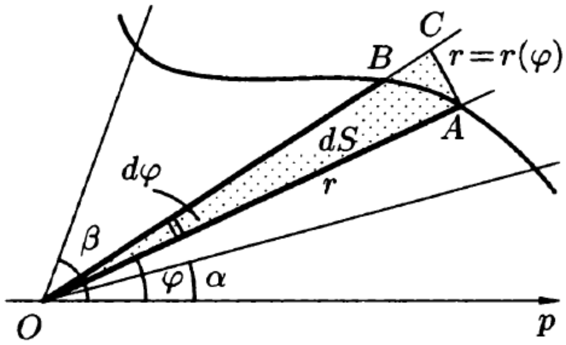
$$S=\int_c^d x\cdot dy,\quad x=\varphi\left(y\right).\tag{34}$$



Для параметрически заданных функций в декартовой СК

$$\begin{cases}x=x\left(t\right),\\ y=y\left(t\right),\end{cases}\quad t\in\left[\alpha;\beta\right],$$

$$S=\int_{x(\alpha)}^{x(\beta)}ydx=\int_\alpha^\beta y\left(t\right)\cdot x'\left(t\right)dt.\tag{35}$$



В полярной системе координат

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\left(\varphi\right)d\varphi.\tag{36}$$

Для определения площадей фигур, ограниченных сверху и снизу заданными кривыми $y_1(x),y_2(x)$, прежде чем применять соответствующую формулу для нахождения площади нужно определить пределы интегрирования, т.е. абсциссы точек пересечения кривых $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Они находятся как решения уравнения: $y_1(x)=y_2(x)$. Корни этого уравнения x_1,x_2, причем $x_1<x_2$ являются пределами интегрирования.

Пример 1. Вычислить сегмент площади фигуры, ограниченной графиками функций $y=(x-2)^3, \quad y=4x-8.$

Найдем точки пересечения графиков функций: $(x-2)^3=4x-8,$

$(x-2)^3=4(x-2); \quad (x-2)\left((x-2)^2-4\right)=0;$

$(x-2)=0; \rightarrow x_1=0; \quad (x-2)^2=4; \rightarrow x_2=2, \; x_3=4.$

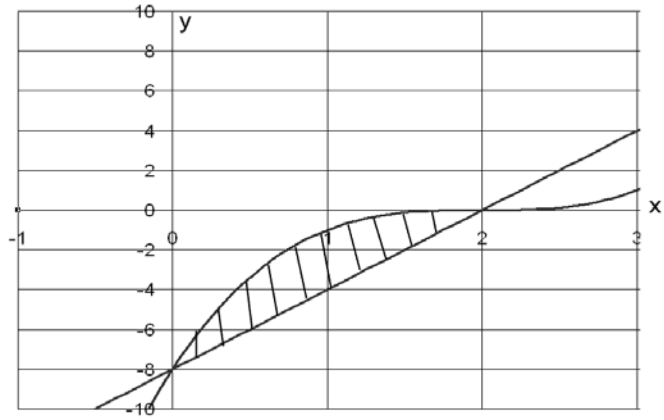


Рисунок 5

Тогда первый сегмент площади отыщется следующим образом (33)

$$S=2\int_0^2(4x-8-(x-2)^3)dx=2\int_0^2(4x-8-x^3+6x^2-12x+8)dx=$$

$$=2\int_0^2(6x^2-x^3-8x)dx=2(2x^3-\frac{1}{4}x^4-4x^2)\Big|_0^2=4\cdot 2^3-\frac{1}{2}\cdot 2^4-8\cdot 2^2=8.$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x=a\cos t, \; y=b\sin t$ (см. рисунок 6).

Найдем сначала четвертую часть площади *S*. Здесь *x* изменяется от 0 до *a*, следовательно, *t* изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до 0. По формуле (35) получим

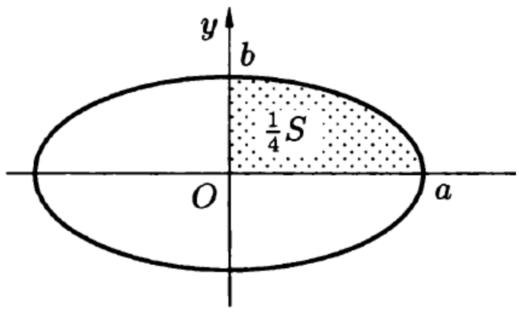


Рисунок 6

$$\frac{1}{4}S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}b\sin t\cdot\left(-a\sin t\right)dt=$$

$$-ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t\,dt=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 2t\right)dt=$$

$$=\frac{ab}{2}\left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{\pi ab}{4}.$$

Таким образом, $\frac{1}{4}S=\frac{\pi ab}{4}$. Значит, площадь всего эллипса $S=\pi ab.$

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной «трехлепестковой розой» $r=a\cos 3\varphi$ (см. рисунок 7).

Найдем сначала площадь половины одного лепестка «розы», т. е. шестую часть всей площади фигуры:

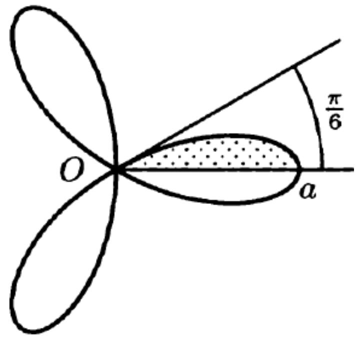


Рисунок 7

$$\frac{1}{6}S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(a\cos 3\varphi\right)^2 d\varphi=\frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}\left(1+\cos 6\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{4}\left(\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{1}{6}\sin 6\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}\right)=\frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{6}+0\right)=\frac{\pi a^2}{24},$$

т. е. $\frac{1}{6}S=\frac{\pi a^2}{24}$. Следовательно, $S=\frac{\pi a^2}{4}$.

Задания для решения в аудитории:

Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций.

1. $y_1=4-x^2$; $y_2=x^2-2x$.

2. $y^2=x^3$, $x=0$, $y=8$.

3. $y=-x^2$, $y=e^x$, $x=1$, $x=0$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$

5. Найти площадь, ограниченную кардиоидой $r=a(1-\cos\varphi)$.

6. Найти площадь, ограниченную астроидой
$x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t.$

7. Найти площадь, ограниченную осью OX и одной аркой циклоиды
$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t).$

6.3 Вычисление объемов тел вращения

При вращении плоской кривой вокруг одной из координатных прямых получается объемная фигура - *тело вращения*.

Сечение этого тела плоскостью, перпендикулярной оси вращения, есть круг, например, с радиусом $y = f(x)$, при вращении вокруг оси *OX*. Его площадь $S(x) = \pi y^2$.

Тогда объем тела по площади параллельных сечений, равен:

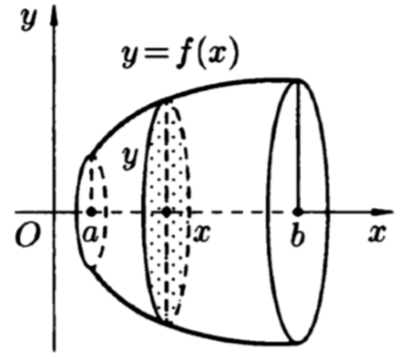
<table>
<tr>
<td>

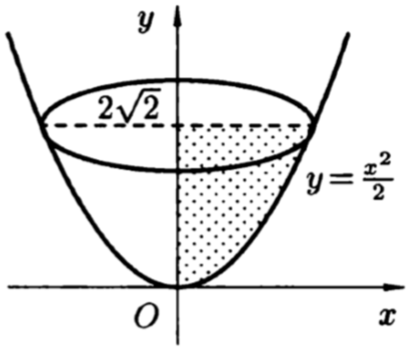
Рисунок 8</td>
<td>$$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx, \qquad (37)$$
при вращении вокруг оси OX</td>
</tr>
<tr>
<td>

Рисунок 9</td>
<td>$$V_y = \pi\int_a^b x^2 dy, \qquad (38)$$
при вращении вокруг оси OY.</td>
</tr>
</table>

Пример 1. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{2}$, $x = 0$, $y = 2\sqrt{2}$ вокруг оси *Oy* (см. рис. 9).

По формуле (38) находим:

$$V_y = \pi\int_0^{2\sqrt{2}} 2y\,dy = \pi y^2\Big|_0^{2\sqrt{2}} = 8\pi.$$

Если фигура, ограничена кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$; $0 \le f_1(x) \le f_2(x)$ и прямыми $x = a, x = b$, вращается вокруг оси OX, то объем тела вращения:

$$V_x=\pi\int_a^b(y_2^{\,2}-y_1^{\,2})dx. \qquad (39)$$

Если фигура ограничена кривыми $x_1=\varphi_1(y)$ и $x_2=\varphi_2(y)$ $(0\le\varphi_1(y)\le\varphi_2(y))$ и прямыми $y=c;\ y=d$ вращается вокруг оси OY, то объём тела вращения:

$$V_y=\pi\int_c^d(x_2^{\,2}-x_1^{\,2})dy. \qquad (40)$$

Пример 2. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций $y=2x-x^2$; $y=-x+2$, вокруг Ox.

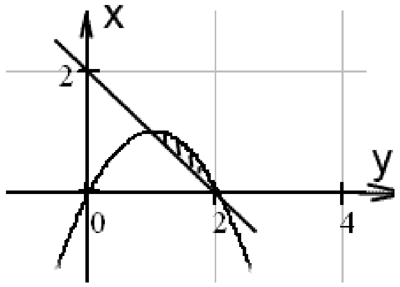


Рисунок 10

По формуле (39) получим

$$V_x=\pi\int_1^2\left[(2x-x^2)^2-(2-x)^2\right]dx=$$

$$=\pi\int_1^2\left[\left(4x^2+x^4-4x^3\right)-\left(2-x\right)^2\right]dx=$$

$$=\pi\left(\frac{4}{3}x^3+\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{(2-x)^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=\pi\left(\frac{4}{3}(8-1)+\frac{32-1}{5}-(16-1)+\frac{(0-1)}{3}\right)=-\pi\frac{7}{15},$$

$$V=\frac{7}{15}\pi.$$

Задания для решения в аудитории:

Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций.

1. $y=-x^2+5x-6,\quad y=0.$ (ось вращения Ox)

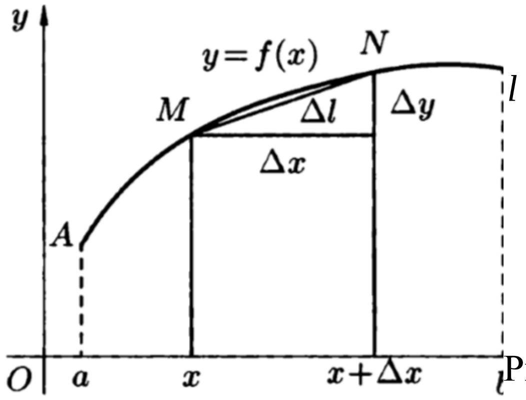
2. $y = x^2$, $y^2 - x = 0$.(ось вращения Ox)

3. $y = \ln x$, $x = 2$, $y = 0$ (ось вращения Oy)

4. $y = x^2$, $y = x^3$ (ось вращения Oy)

6.4 Вычисление длины дуги плоской кривой

Используя теорему Пифагора и кусочно-линейную аппроксимацию плоской кривой, получим



$$l=\int_A^B dl=\int_A^B\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

Рисунок 11 - Длина дуги плоской кривой

Длина дуги кривой определяется по формулам:

для кривой, заданной в декартовой системе координат:

$$y=f(x),\qquad l=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx;\tag{41}$$

для кривой, заданной в параметрической форме:

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}\ \alpha\le t\le\beta,\qquad l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}\,dt\tag{42}$$

для кривой, заданной в полярных координатах:

$$r=r(\varphi),\ \ \alpha\le\varphi\le\beta,\qquad l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(r_\varphi'\right)^2+r^2}\,d\varphi.\tag{43}$$

Последнее выражение получено посредством разложения вектора $r(\varphi)$ на проекции $x=r\cos\varphi,\ \ y=r\sin\varphi$, связывающих полярные и декартовы координаты. Если параметром считать угол φ, то кривая AB задана параметрически. Воспользовавшись формулой (42), получим

$$x_\varphi'=r_\varphi'\cos\varphi-r\sin\varphi;\quad y_\varphi'=r_\varphi'\sin\varphi+r\cos\varphi;$$

$$\left(x_\varphi'\right)^2+\left(y_\varphi'\right)^2=\left(r_\varphi'\cos\varphi-r\sin\varphi\right)^2+\left(r_\varphi'\sin\varphi+r\cos\varphi\right)^2=\left(r_\varphi'\right)^2+r^2.$$

В результате получаем (43).

Пример 1. Вычислить длину дуги кривой $y=\ln x$, содержащейся между точками, для которых $x=\sqrt{8}$ и $x=\sqrt{15}$.

Воспользуемся формулой (41).

Здесь $a=\sqrt{8}$; $b=\sqrt{15}$; $f(x)=\ln x$; $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, тогда

$$l=\int_{\sqrt{8}}^{\sqrt{15}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx=\int_{\sqrt{8}}^{\sqrt{15}}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx=\left|\begin{matrix}\sqrt{x^2+1}=t;\ x^2+1=t^2;\ xdx=tdt\\ x=\sqrt{8};\ t=3;\qquad x=\sqrt{15};\ t=4\end{matrix}\right|=$$

$$=\int_{\sqrt{8}}^{\sqrt{15}}\frac{\sqrt{x^2+1}\cdot xdx}{x^2}=\int_3^4\frac{t\cdot tdt}{t^2-1}=\int_3^4\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=\int_3^4\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=\left.\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\right|_3^4=$$

$$=4+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}-3-\frac{1}{2}\ln\frac{2}{4}=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3\cdot4}{5\cdot2}=1+\frac{1}{2}\ln\frac{6}{5}.$$

Пример 2. Вычислить длину дуги кривой, заданную параметрически

$$\begin{cases}x=4(\cos t+t\sin t)\\ y=4(\sin t-t\cos t)\end{cases}\quad 0\le t\le 2.$$

Воспользуемся формулой (42).

$$x'=4(-\sin t+\sin t+t\cos t)=4t\cos t;\quad y'=4(\cos t-\cos t+t\sin t)=4t\sin t.$$

$$l=\int_0^2\sqrt{16t^2\cos^2 t+16t^2\sin^2 t}dt=\int_0^2 4tdt=2t^2\Big|_0^2=2\cdot2^2=8.$$

Пример 3. Вычислить длину дуги кривой, заданную уравнением в полярных координатах $\rho=2e^{4\varphi/3}$; $-\pi/2\le\varphi\le\pi/2.$

Воспользуемся формулой (43). $\rho'=\dfrac{8}{3}e^{4\varphi/3}$.

$$l=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{4e^{8\varphi/3}+\frac{64}{9}e^{8\varphi/3}}d\varphi=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\frac{100}{9}e^{8\varphi/3}}d\varphi=\frac{10}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{4\varphi/3}d\varphi=$$

$$=\frac{10}{3}\cdot\frac{3}{4}e^{4\varphi/3}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{5}{2}\left(e^{\frac{2\pi}{3}}-e^{-\frac{2\pi}{3}}\right).$$

Задания для решения в аудитории:

1) Вычислить длину дуги кривой, заданной в прямоугольной системе координат

1. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x,\ 0\le x\le\dfrac{8}{9}.$

2. $y^2 = (x+1)^3$, отсеченной прямой x=4.

2) Вычислить длины дуг кривых, заданных параметрическими уравнениями.

1. $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases}$ $\qquad 0 \le t \le \pi.$

(циклоида)

2. $x=\dfrac{t^6}{6}, y=2-\dfrac{t^4}{4}$ между точками пересечения осями координат

3) Вычислить длины дуг кривых, заданных в полярной системе координат:

1. кардиоидой $r = a\left(1 - \cos\varphi\right)$;

2. всей кривой $r = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

6.5 Вычисление площади поверхности вращения

Найдем площадь S поверхности, образованной вращением кривой AB вокруг оси Ox (рисунок 12). Для этого, по-прежнему, воспользуемся кусочно-линейной аппроксимацией кривой. Тогда элементарный элемент тела вращения можно считать усеченным конусом (рисунок 13), площадь боковой поверхности которого вычисляется по известной формуле

$$S_Б = 2\pi \frac{R+r}{2} l, \tag{44}$$

где $R_{ср}$ - среднее значение радиусов R и r; l - образующая.

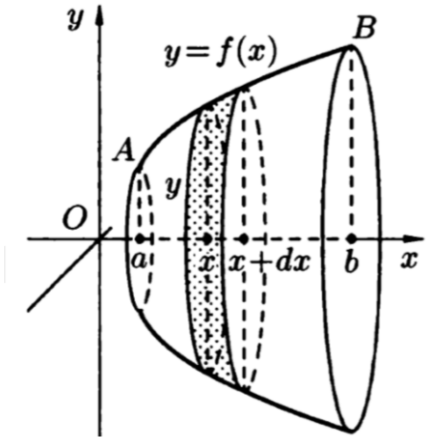


Рисунок 12

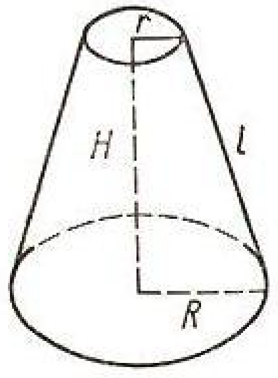


Рисунок 13

Найдем дифференциал площади ds усеченного конуса с образующей dl, и радиусами оснований y и $y + dy$. Площадь его боковой поверхности равна

$$ds = \pi\left(y + y + dy\right)\cdot dl = 2\pi y dl + \pi dy dl.$$

Отбрасывая произведение $dydl$ как бесконечно малую высшего порядка, чем ds, получаем $ds = 2\pi y dl$, или, так как $dl = \sqrt{1+\left(y'_x\right)^2}dx$, то $ds = 2\pi y\sqrt{1+\left(y'_x\right)^2}dx.$

Интегрируя полученное равенство в пределах от $x = a$ до $x = b$, получаем искомую *площадь поверхности вращения*

$$S_x = 2\pi\int_a^b y\cdot\sqrt{1+\left(y'_x\right)^2}dx. \tag{45}$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями, то по аналогии с (42)

$$S_x = 2\pi\int_\alpha^\beta y\left(t\right)\sqrt{\left(x'_t\right)^2+\left(y'_t\right)^2}dt. \tag{46}$$

Если кривая задана в полярной системе координат, то по аналогии с (43)

$$S_x = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} r\sin\varphi\sqrt{r^2+\left(r'_{\varphi}\right)^2}\,d\varphi . \qquad (47)$$

При вращении кривой вокруг оси OY

$$S_y = 2\pi\int_{c}^{d} x\sqrt{1+(x'_y)^2}\,dy . \qquad (48)$$

Пример 1. Найти площадь поверхности шара радиуса R.

Поверхность шара образована вращением полуокружности $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $-R\le x\le R$, вокруг оси Ox. По формуле (45) находим

$$S_x = 2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,dx =$$

$$= 2\pi\int_{-R}^{R} R\,dx = 2\pi R\cdot x\Big|_{-R}^{R} = 4\pi R^2.$$

Пример 2. Дана циклоида

$$\begin{cases} x = a\left(t-\sin t\right), \\ y = a\left(1-\cos t\right), \end{cases} \quad 0\le t\le 2\pi.$$

Найти площадь поверхности, образованной вращением ее вокруг оси Ox.

Решение: При вращении половины дуги циклоиды вокруг оси Ox площадь поверхности вращения равна, см (46)

$$\frac{1}{2}S_x = 2\pi\int_0^{\pi} a\left(1-\cos t\right)\cdot\sqrt{\left(a\left(1-\cos t\right)\right)^2+\left(a\sin t\right)^2}\,dt =$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi} a^2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}\cdot\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt = 4\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}\cdot\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt =$$

$$8\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{t}{2}\,dt = = 8\pi a^2\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$\left|\begin{array}{l} u=\cos\frac{t}{2};\ t=0,\ u=1;\ t=\pi,\ u=0 \\ du=-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\,dt; \end{array}\right| =$$

$$= -2\cdot 8\pi a^2\int_1^0\left(1-u^2\right)du = -16\pi a^2\left(u-\frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_1^0 = -16\pi a^2\,\frac{2}{3}.$$

т.е. $\frac{1}{2}S_x = \frac{32}{3}\pi a^2$. Следовательно, $S_x = \frac{64}{3}\pi a^2$.

Пример 3. Найти площадь тора, образующегося при вращении окружности $r = \sin\phi$ вокруг оси Ox.

$$S_x = 2\pi\int_0^{\pi} \sin\phi \cdot \sin\phi\sqrt{\sin^2\phi + \cos^2\phi}\,d\phi = \pi\int_0^{\pi}(1-\cos 2\phi)\,d\phi = \pi^2 .$$

Задания для решения в аудитории:

Найти площадь поверхности, полученной вращением

1) дуги параболы $y = 2\sqrt{x}$, $0 < x < 1$ вокруг оси Ox

2) дуги $y = \cos 3x$ от $x = 0$ до $x = \dfrac{\pi}{2}$ вокруг оси Ox

3) кривой $y = \frac{x^2}{2}$, отсеченной прямой y=1,5 вокруг оси OY

4) $4x^2 + y^2 = 4$ вокруг OY

5) всей кривой $x = a\,cos^3 t, y = a\,sin^3 t$ вокруг OX

Контрольная работа «Неопределенный интеграл» (типовые варианты)

Вариант 1

Найти неопределенные интегралы

1. $\int (4-3x)e^{-3x}dx.$

2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$

3. $\int \frac{x^3+1}{x^2-x}dx.$

4. $\int \frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3}dx.$

5. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx.$

6. $\int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}}dx$;

Вариант 2

Найти неопределенные интегралы

1. $\int arctg\sqrt{4x-1}dx.$

2. $\int \frac{1+\ln x}{x}dx.$

3. $\int \frac{3x^3+1}{x^2-1}dx.$

4. $\int \frac{x^3+6x^2+13x+8}{x(x+2)^3}dx.$

5. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[3]{x^2}}dx.$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$

Вариант 3

Найти неопределенные интегралы

1. $\int (3x+4)e^{3x}dx.$

2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

3. $\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx.$

4. $\int \frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3}dx.$

5. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}}dx.$

6. $\int \cos^5 \frac{x}{7}\,dx$

Вариант 4

Найти неопределенные интегралы

1. $\int (4x-2)\cos 2x dx.$

2. $\int \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx.$

3. $\int \frac{2x^3+5}{x^2-x-2}dx.$

4. $\int \frac{x^3+6x^2+14x+10}{(x+1)(x+2)^3}dx.$

5. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[9]{x^4}}dx.$

6. $\int ctg^3 x\,dx$

Контрольная работа «Определенный интеграл» (типовые варианты)

Вариант 1.

1). $\int_{-a}^{a}\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ 2). $\int_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt{1-ln^2x}}$ 3). $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^4}$

4)Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $xy=4, x+y-5=0$.

5)Вычислить длину кардиоиды: $S=a(1-cos\phi)$.

6)Вычислить объём тела, полученного от вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной параболами: $y=-x^2+8$ и $y=x^2$

Вариант 2.

1). $\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$ 2). $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+cos\,x}$ 3). $\int_{0}^{\infty}e^{-ax}dx$ a>0

4)Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y^2=16-8x$ и $y^2=24x+48$.

5)Вычислить длину всей линии: $S=sin^2\frac{\phi}{2}$.

6)Вычислить объём тела, полученного от вращения вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной фигуры, ограниченной осью OX, прямой $x=\pi$ и аркой циклоиды

$$\begin{cases} x=a(t-sin\,t) \\ y=a(1-cos\,t) \end{cases}$$

Вариант 3.

1). $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}dx}{x^6}$ 2). $\int_{2}^{3}\frac{xdx}{2x^2+3x-2}$ 3). $\int_{2}^{\infty}\frac{ln\,x}{x}dx\ a>0$

4)Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y^2=x^2-3x$ и $3x+y-4=0$.

5)Вычислить длину линии: $\begin{cases} x=R(cos\,t+t\,sin\,t) \\ y=R(sin\,t-t\,cos\,t) \end{cases}$ от $t_1=0$ до $t_2=\pi$

6)Фигура, ограниченная дугами парабол $y=x^2; x=y^2$ вращается вокруг оси абсцисс. Найти объём тела вращения.

Вариант 4.

1). $\int_{0}^{1}x^2\sqrt{1-x^2}dx$ 2). $\int_{1}^{e^3}\frac{dx}{x\sqrt{1+ln\,x}}$ 3). $\int_{1}^{\infty}x^2e^{-x^3}dx$

4).Фигура ограничена линией $S=4cos3\phi$. Вычислить площадь той её части, которая расположена вне круга $S=2$.

5)Вычислить длину дуги кривой $y=\sqrt{(x+1)^3}(-1\le x\le 1)$

6)Вычислить объём тела, полученного от вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y^2=2px$ и x=n (p>0,n>0).

Приложение 1. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

Правила дифференцирования

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, в частности, $(cu)' = c \cdot u'$;

3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, в частности $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{cv'}{v^2}$;

4. $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, если $y = f(u),\ u = \varphi(x)$;

5. $(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$.

Формулы дифференцирования

1. $(c)' = 0$;

2. $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$, в частности, $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$; $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \left(u^{-1}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$

3. $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, в частности, $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

4. $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$, в частности $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$;

5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

7. $(tg u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;

8. $(ctg u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;

9. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

10. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

11. $(arctg u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

12. $(arcctg u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

13. $(sh u)' = ch u \cdot u'$;

14. $(ch u)' = sh u \cdot u'$;

15. $(th u)' = \dfrac{1}{ch^2 u} \cdot u'$;

16. $(cth u)' = -\dfrac{1}{sh^2 u} \cdot u'$.

Приложение 2. ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

1. $\int u^a du = \dfrac{u^{a+1}}{a+1} + C \qquad (a \neq -1) \qquad \left(\int du = u + C\right);$

2. $\int \dfrac{du}{u} = ln|u| + C;$

3. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{ln\, a} + C; \qquad \int e^u du = e^u + C;$

4. $\int sin\, u du == -cos\, u + C \qquad \left(\int shu \cdot du = chu + C\right);$

5. $\int cos\, u du = sin\, u + C \qquad \left(\int chu \cdot du = shu + C\right);$

6. $\int tgudu = -ln|cos\, u| + C;$

7. $\int ctgudu = ln|sin\, u| + C;$

8. $\int \dfrac{du}{cos^2 u} = tgu + C \qquad \left(\int \dfrac{du}{ch^2 u} = thu + C\right);$

9. $\int \dfrac{du}{sin^2 u} = -ctgu + C \qquad \left(\int \dfrac{du}{sh^2 u} = -cthu + C\right);$

10. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arc\, sin \dfrac{u}{a} + C;$

11. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C;$

12. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{u}{a} + C;$

13. $\int \dfrac{du}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{2a} \cdot ln\left|\dfrac{a+u}{a-u}\right| + C;$

14. $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \dfrac{u}{2} \cdot \sqrt{a^2 - u^2} + \dfrac{a^2}{2} arcsin \dfrac{u}{a} + C.$

15. $\int \sqrt{a^2 + u^2} du = \dfrac{u}{2} \cdot \sqrt{a^2 + u^2} + \dfrac{a^2}{2} ln\left|u + \sqrt{a^2 + u^2}\right| + C;$

16. $\int \dfrac{du}{sin\, u} = ln\left|tg \dfrac{u}{2}\right| + C;$

17. $\int \dfrac{du}{cos\, u} = ln\left|tg\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

Приложение 3. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ПОДСТАНОВКИ

1. Интегрирование функции от линейного двучлена:

если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)\cdot dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

2. Формула интегрирования по частям: $\int udv = uv - \int vdu.$

3. Универсальная тригонометрическая подстановка $tg\frac{x}{2} = t$, тогда

$$sin\,x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad cos\,x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2arctgt,\; dx = \frac{2}{1+t^2}dt\,.$$

4. Тригонометрическая подстановка $t = tgx$, тогда

$$x = arctgt;\; dx = \frac{dt}{1+t^2}; \quad cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2}; \quad sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}\,.$$

5. Формулы тригонометрии:

$$cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1 + cos\,2x\right); \quad sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - cos\,2x\right);$$

$$sin\alpha\,cos\,\beta = \frac{1}{2}\left(sin\left(\alpha - \beta\right) + sin\left(\alpha + \beta\right)\right),$$

$$cos\,\alpha\,cos\,\beta = \frac{1}{2}\left(cos\left(\alpha - \beta\right) + cos\left(\alpha + \beta\right)\right),$$

$$sin\alpha\,sin\,\beta = \frac{1}{2}\left(cos\left(\alpha - \beta\right) - cos\left(\alpha + \beta\right)\right).$$

6. Использование тригонометрических подстановок:

$$\int R\left(x; \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx \quad \to \quad x = a\cdot sint\,;$$

$$\int R\left(x; \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx \quad \to \quad x = a\cdot tgt\,;$$

$$\int R\left(x; \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx \quad \to \quad x = \frac{a}{sint}\,.$$

Приложение 4. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

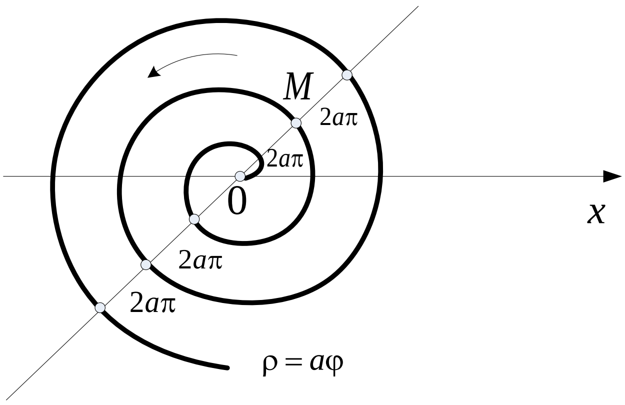


Рисунок 1 - Спираль Архимеда

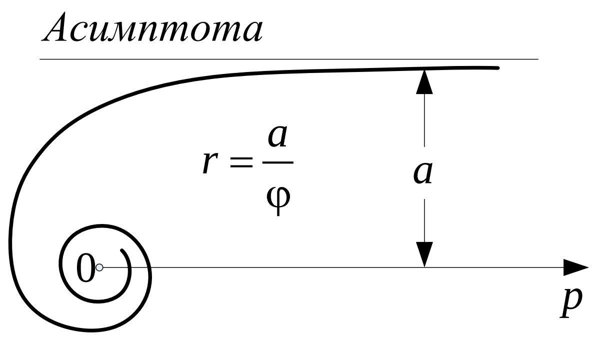


Рисунок 2 - Гиперболическая спираль

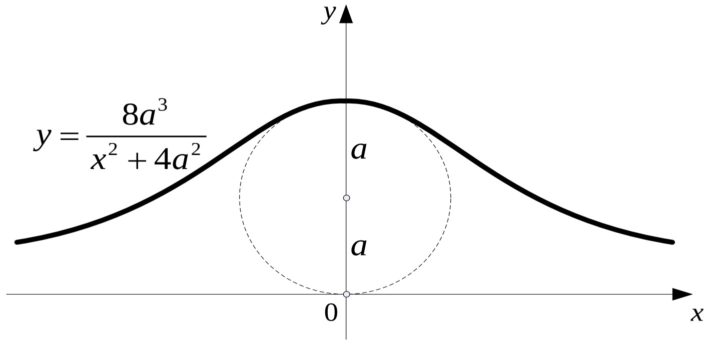


Рисунок 3 - Локон

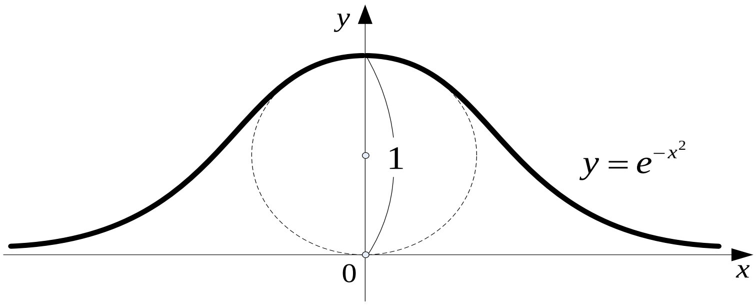
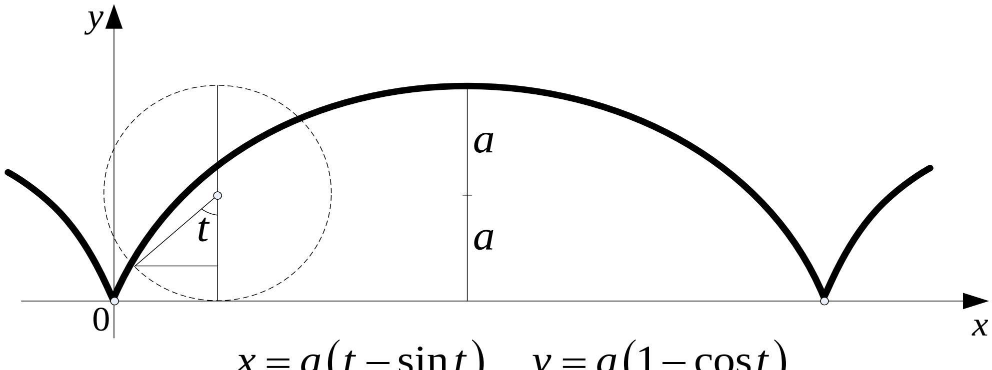


Рисунок 4 - Кривая вероятностей



$$x = a(t - \sin t) \quad y = a(1 - \cos t)$$

Рисунок 5 - Циклоида

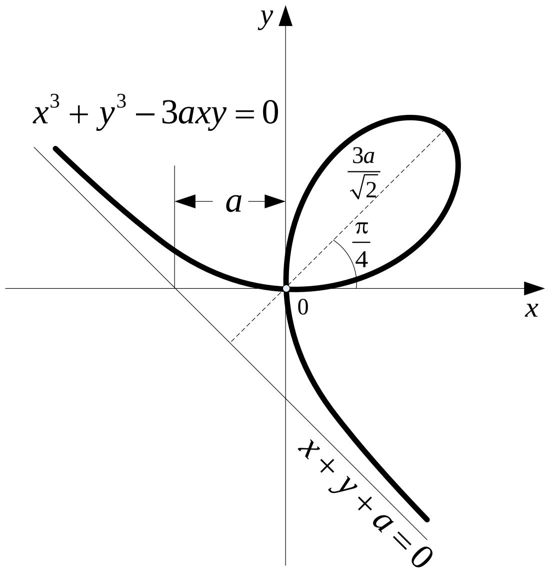
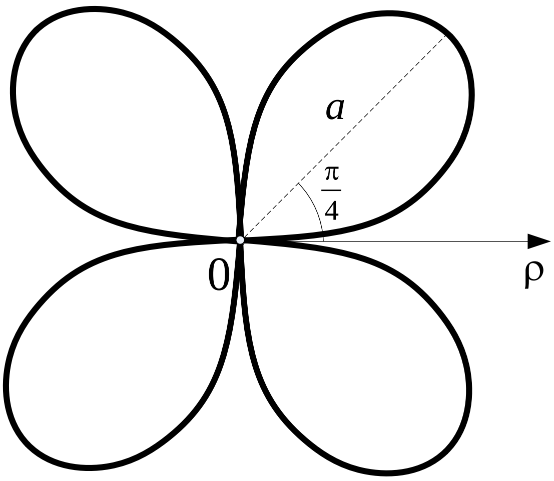


Рисунок 6 - Декартов лист



$$r = a \sin 2\varphi$$

Рисунок 7 - Четырёхлепестковая роза

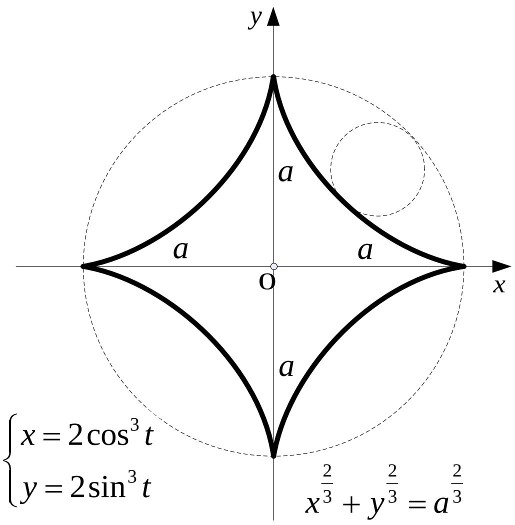
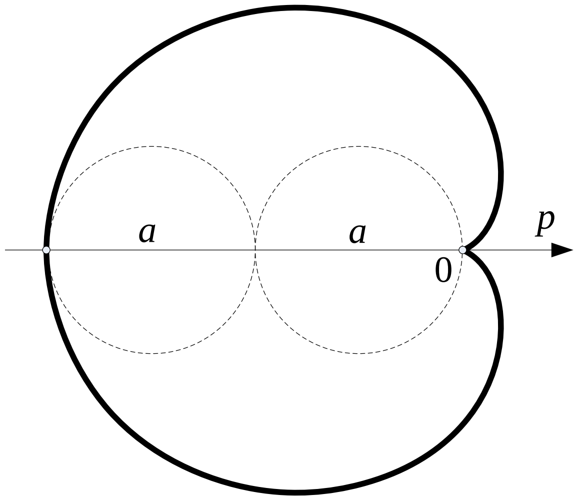


Рисунок 8 - Астроида



$$r = a(1 - \cos\varphi)$$

Рисунок 9 - Кардиоида

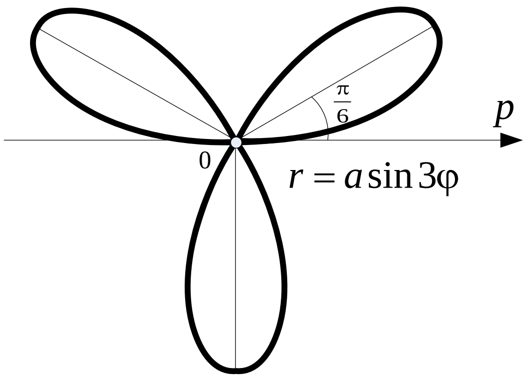
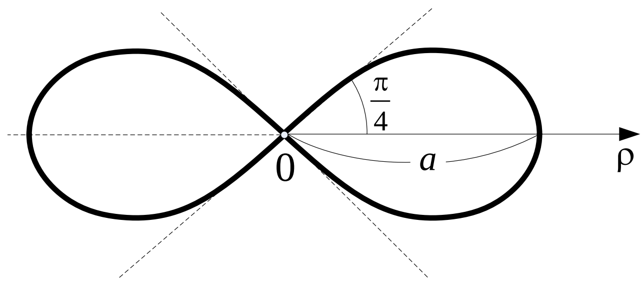


Рисунок 10 - Трёхлепестковая роза

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$$



$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

Рисунок 11 - Лемниската Бернулли

ЛИТЕРАТУРА

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. -10-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2011. - 608 с.

2. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. пособие для студентов втузов в 2-х т. Т. 1. - изд. стер. - М. : Интеграл-Пресс, 2007. - 416 с. - (Гр.).

3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. пособие для студентов втузов в 2-х т. Т. 2. - изд. стер. - М. : Интеграл-Пресс, 2007. - 544 с. - (Гр.).

4. Ахтямов А. М. Математика для социологов и экономистов: Учеб. пособие. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 464 с.

5. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов: Учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / [Кремер Н.Ш и др.] под ред. проф. Кремера Н.Ш. - 3е изд. - М.ЮНИТИ-ДАНА, 2010. -479с.

6. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. — М.:, Физматлит, 2006. — 335 с.

7. Литвин Д.Б., Таволжанская О.Н., Мелешко С.В., Гулай Т.А. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной : учебное пособие. - Ставрополь : Сервисшкола, 2016. - 80с.

8. Литвин Д.Б., Мелешко С.В., Яновский А.А. Определенный интеграл. Функции нескольких переменных: Учебное пособие, 2-е издание– Ставрополь : Сервисшкола, 2017. – 62с.

Публикуется в авторской редакции

Подписано в печать 29.01.2020. Бумага офсетная. Гарнитура "Times".
Формат 60×84/16. Усл. печ. л.4,75. Тираж 255 экз. Заказ №14.

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии "АГРУС" Ставропольского ГАУ, Ставрополь, ул. Пушкина,15. тел. 35-06-94.